Teorema 4.4. (Lema Fatua.)
Neka su funkcije $f_n : X \to [0,\infty]$, $n \in \mathbf{N}$, merljive. Važi

$$\int_X (\lim_{n\to\infty} \inf f_n) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu$$

Dokaz: Podsetimo se, $\lim\limits_{n\to\infty} \inf f_n = \sup\limits_{k\in\mathbf{N}} \left(\inf\limits_{n\geq k} f_n \right)$. Neka je

$$g_k(x) = \inf_{i\geq k} f_i(x), \quad x \in X.$$

Jasno, $(g_k)_k$ je rastući niz funkcija koji konvergira ka $\sup_{k\in\mathbf{N}} g_k$.
Važi

$$g_k \leq f_n,\ n \geq k \ \text{ te je } \int_X g_k d\mu \leq \inf_{n\geq k} \int_X f_n d\mu,\ k \in \mathbf{N},$$

$$\int_X g_k d\mu \leq \sup_{k\in\mathbf{N}} \inf_{n\geq k} \int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu. \tag{4.6}$$

Niz $(g_k)_k$ je rastući i važi da je $g = \lim\limits_{k\to\infty} g_k$ merljiva funkcija. Na osnovu Teoreme 4.2 sledi

$$\int g_m d\mu \to \int g d\mu, \text{ kad } m \to \infty.$$

Kako je $\lim\limits_{k\to\infty} g_k = \sup_{k\in\mathbf{N}} g_k$ i na osnovu (4.6)

$$\int_X g d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu,$$

sledi

$$\int_X (\lim_{n\to\infty} \inf f_n) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu.$$

■

Primer 4.3. Posmatrajmo prostor Lebegove mere $(\mathbf{R}, \mathcal{L}, m)$ i niz funkcija $f_n = \kappa_{[n,n+1]}$. Tada je $\int_\mathbf{R} f_n\, dm = 1$ za sve $n \in \mathbf{N}$, ali je $\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = 0$, te je $\int_\mathbf{R} \lim_{n\to\infty} f_n\, dm = 0$. Dakle, u lemi Fatua važi striktna nejednakost:

$$0 = \int_\mathbf{R} \lim_{n\to\infty} f_n\, dm \lneqq \lim_{n\to\infty} \int_\mathbf{R} f_n\, dm = 1.$$